# Altlasten des Mathematikunterrichts

## Eine Diskussion mit dem Ziel der Entschlackung

Reinhard Oldenburg

In der Zeitschrift *Praxis der Naturwissenschaften – Physik* gab es vor Jahren eine Serie, die systematisch veraltete Konzepte und Sprechweisen, die sich im Physikunterricht finden lassen, aufgegriffen und diskutiert hat. Die Mathematik hat möglicherweise weniger Altlasten – für eine Serie reicht es wohl nicht, aber es gibt durchaus einiges, was die Schulmathematik an Ballast angehäuft hat.

Dieser Beitrag führt eine Reihe von solchen Altlasten auf und macht Vorschläge zu ihrer Entsorgung. Letzteres ist manchmal nur möglich, wenn Lehrplanschreiber und Schulbuchautoren sich ein solches Ziel vornehmen. Aber auch für die heute praktizierende Lehrkraft können diese Überlegungen erhellend sein, weil unnötige komplexe Strukturen auch Lernende verwirren können und Lehrkräfte für diesen Umstand sensibilisiert sein sollten.

### Notation

*Definition*
Mathematische Objekte müssen eingeführt und oft benannt werden. Je nach Art werden die Konstruktionsoperationen unterschiedlich geschrieben und die Art, wie der neue Bezeichner auftritt, variiert. Dies verdeckt, dass es sich immer um den gleichen Prozess handelt.

Neue Zahlen (oder besser: Neue Bezeichnungen für alte Zahlen) – sofern sie konstant sind – führt man ein mit dem Gleichheitszeichen: $r = 5$. Anders bei neuen Punkten: Man schreibt A(1 | 2) oder B(1;2). Das sieht aus wie die Anwendung einer Funktion auf zwei Zahlen. Bei Geraden, die durch Gleichungen beschrieben werden, übernimmt ein Doppelpunkt die Namensfestlegung: $g : y = 2x + 1$ (ebenso in der vektoriellen Schreibweise der Sekundarstufe II). Dabei könnte verwirren, dass es so aussieht als ob eine Gerade durch $y$ geteilt wird und das Ergebnis gleich einem Term in $x$ ist.

Eine systematische, aber etwas mühsame Entsorgung dieser Altlasten wäre – außer im extrem häufigen Fall von Zahlen – immer einen Konstruktor zu schreiben: $A = \text{Punkt}\,(1;2)$, $g = \text{Gerade}\,(y = 2x+1)$. Dieser Konstruktor ist einfach eine spezielle Funktion. Die Funktion Punkt etwa bildet ab von der Menge der Zahlenpaare in die Punkte der Ebene. Die Umkehrfunktion gibt die Koordinaten eines Punktes. Auch das ist nützlich, etwa $(3,1) + \text{Punkt}^{-1}\,(\text{Schnittpunkt}\,(g_1, g_2))$.

Überlegen könnte man, ob man immer dann wenn ein Bezeichner zum ersten mal verwendet wird, einen Doppelpunkt verwendet: $r := 5$, $A := \text{Punkt}\,(1;2)$.

*Buchstaben nicht als Repräsentanten für Mengen*
Variablen sind an sich bedeutunglose Symbole: $a + b = b + a$ gilt genauso wie $x + y = y + x$, die als Variablen verwendeten Buchstaben sind irrelevant. Es ist schon bedenklich, wenn immer feste Bezeichnungen verwendet werden, wenn die Geradensteigung immer $m$ heißt, aber das mag noch vertretbar sein. Was nicht geht ist, wenn Buchstaben für Mengen stehen. So gibt es die Merkregel gerade+gerade=ungerade verkürzt als $u + u = g$ und analog weitere Regeln für Addition und Subtraktion. Darin stehen die Buchstaben nicht für Zahlen, denn sonst müsste, um etwa den Fall 3+5=8 abzudecken, $u$ sowohl für 3 als auch für 5 stehen. Richtig ist die Regel nur, wenn man $u$ als Menge aller ungeraden Zahlen versteht und die Operation elementweise durchführt. Diesen Abstraktionsgrad erreicht der Matheunterricht aber nicht und so führen $u + u = g$ und $u \cdot g = g$ dem Schüler eine falsche Verwendung von Variablen vor Augen. Während man mit der ersten immerhin argumentieren kann ($2u = g$, das ist schlüssig), ist das bei der zweiten Form nicht möglich: Falls $g \neq 0$ folgt $u = 1$.

*Gemischte Bruchschreibweise und Malpunkte*
Gemischte Brüche wie $3\frac{1}{2}$ führen zu vielen Fehlern, die Notation ist inkonsistent mit den sonstigen Konventionen der Algebra und sollte in die Marginalienspalte der Schulbücher verbannt werden (Etwa mit dem Text: Bei einer altmodischen Angabe z. B. auf einigen Lebensmittel ist …). Im Mathematikunterricht schreibt man konsequent $3 + \frac{1}{2}$. Die entsprechenden Schulbuchaufgaben lauten dann einfach: Stelle das Ergebnis als Summe einer natürlichen Zahl und eines echten Bruchs dar.

Analog vermeidet man auch die Verkürzungsregel zum Weglassen des Malpunktes: $2 \cdot x$ wird nie als $2x$ geschrieben – und hoffentlich lesen Schüler nie sinx als $sin \cdot x$ (noch besser schreibt man $\sin(x)$.

Die Bequemlichkeitsregel hat ihre Berechtigung für Experten, die viel schreiben müssen, für Novizen ist der Schaden größer als der Nutzen: Einfach entsorgen.

*Funktionsschreibweisen*
Die bei trigonometrischen Funktionen beliebten Schreibweisen $\sin^2(x)$ statt $(\sin(x))^2$ können an Systematik interessierte Lernende nur verwirren. Grundsätzlich sollte man nämlich zwischen einer Funktion und ihrem Wert unterscheiden, also zwischen $f, f(x)$. Im Beispiel soll der Funktionswert quadriert werden, nicht die Funktion. Eine sinnvolle und konsistente Deutung von $\sin^2(x)$ wäre $\sin(\sin(x))$, denn angewendet auf Funktionen als Objekte kann Quadrieren eigentlich nur doppelte Hintereinanderausführung bedeuten. Hier ist die Entsorgung einfach: Man verwendet die verwirrende Schreibweise einfach nicht.

*Funktionen und Funktionsgleichungen*
Viele Kollegen würden den folgenden Satz kritisieren: „Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist bei $x = 0$ nicht definiert.“ Anstoß ist, dass $f(x) = \frac{1}{x}$ keine Funktion, sondern eine Funktionsgleichung ist. Stattdessen solle man schreiben „Die Funktion $f$ mit $f(x) = \ldots$“ oder eine Pfeilschreibweise für die Funktion benutzen. (Noch konsistenter wäre die Verwendung eines Allquantors: „Die Funktion $f$ mit $\forall x : f(x) = \frac{1}{x}$“) Der Einwand ist selbstverständlich berechtigt, aber m. E. doch gegenstandslos oder zumindest gegenstandsarm. Man muss sich eben einmal klar machen, dass die Funktion nur das $f$ ist, nicht das Ganze. Man bezieht sich also mit $f$ auf einen Teil, nicht auf das ganze Dargebotene – so wie wenn ich sage, „Da kommt Michael“ und auf einen Mann auf dem Fahrrad zeige. Es stört nicht, dass da eigentlich nicht Michael alleine kommt, sondern ein Fahrrad, Kleidungsstücke und eben auch Michael. Dass man mit solchen Konventionen, nach denen der Leser oder Zuhörer sich das Passende heraussuchen muss, normalerweise keine Probleme hat, belegen auch die Kritiker des obigen Satzes. Keiner von Ihnen, soweit ich sie kenne, hat bisher Anstoß genommen am zweiten Teil der Aussage. Dabei ist $x = 0$ doch gar keine Stelle, sondern es ist eine Gleichung. Korrekt – und ich meine übermäßig korrekt – müsste es heißen: „Die Funktion$f$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist an der Stelle $x$ mit $x = 0$ nicht definiert.“

*Flexibler Umgang mit dem Gleichheitszeichen*
Die im Abschnitt zuvor angesprochene Problematik mit dem Gleichheitszeichen soll noch etwas vertieft werden. Eine fachlich korrekte Vorstellung vom Gleichheitszeichen scheint zu sein, dass es sich um eine Funktion $'='\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{wahr, falsch\}$ handelt. Diese Sichtweise ist konsistent, wenn man $a = b = c$ als $a = b \wedge b = c$und nicht als $(a = b) = c$ liest. Allerdings kann man an vielen Stellen mathematische Erklärungen der folgenden Art hören und lesen: „5 Geodreiecke a 2€ kosten zusammen $5 \cdot 2€ = 10€$“. Wenn das Gleichheitszeichen eine Funktion auf dem kartesischen Produkt einer Menge mit sich selbst und den Wahrheitswerten als Wertemenge ist, dann ist das Ergebnis des Gleichheitszeichens in $5 \cdot 2€ = 10€$ gleich *„wahr“* und, weil man Gleiches durch Gleiches ersetzen darf, sagt der Satz als Ganzes „5 Geodreiecke a 2€ kosten zusammen *wahr*“. Das ist Unsinn und konfligiert mit der Idee, wir hätten eine Funktion $'='\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{wahr, falsch\}$. Aber was sonst könnte das Gleichheitszeichen sein? Etwa das: Die Bedeutung des Gleichheitszeichens ist der Wert einer der Seiten, wenn sie gleich sind, sonst aber *‚falsch‘*. OK, damit ist das Geodreicksbeispiel gerettet, aber dann ist der Wert von *‚falsch=falsch‘* dummerweise, *falsch‘*, obwohl *‚wahr‘* zu erwarten wäre. Ich denke, man wird letztlich nicht umhinkommen, beide Sichtweise zu erlauben – evtl. mit verschiedenen Zeichen. Solange das nicht üblich ist, muss man die Doppelrolle bewusst machen. Die formallogisch korrekte Fassung ist übrigens die erste, d. h. logisch korrekt müsste es heißen „5 Geodreiecke a 2€ kosten zusammen $5 \cdot 2€$ und $5 \cdot 2€ = 10€$“

## Überflüssige Begriffe

*Das unbestimmte Integral*
In mehr als einem Schulbuch kann man lesen, dass das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{dx}$ die Menge aller Stammfunktionen sei – um gleich darauf das Beispiel $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ präsentiert zu bekommen, wo links also eine Menge von Funktionen (oder Funktionstermen) rechts aber ein einziger Funktionsterm steht. Na gut, man sollte die rechte Seite also lesen als $\{\frac{x^3}{3} + C | C \in \mathbb{R}\}$. Mit der Konvention der punktweisen Operation von Mengen kann man das auch schreiben als $\frac{x^3}{3} + \{C | C \in \mathbb{R}\}$ und das ist $\frac{x^3}{3} + \mathbb{R}$. Ist damit irgendwas gewonnen? Braucht man den Begriff?

Auf den Begriff der Stammfunktion kann man nicht verzichten, aber wozu braucht man den des unbestimmten Integrals? Bekanntlich sind Integrierbarkeit und Existenz einer Stammfunktion zwei unterschiedliche Dinge, wieso also durch eine Vermengung die Dinge (nämlich die Erwähnung des Wortes „Integral“ dort wo es um Stammfunktionen geht) enger als nötig zusammenbringen? Die Entsorgung ist einfach: Den Begriff „unbestimmtes Integral“ kann man einfach weglassen.

*Ortsvektor*
Viele Bücher unterscheiden kleinlich Punkte und Ortsvektoren. Der Hintergrund (Unterschied zwischen Vektorraum und affinem Raum) bleibt allen Schülern verborgen, die Unterscheidung zu erlernen gelingt nur wenigen, aber alle müssen sich mit umständlichen Formulierungen herumschlagen. Also, einfach nicht unterscheiden und sagen, dass man das gleiche Zahlentupel mal als Punktkoordinaten, mal als (verschiebbaren) Pfeil interpretiert.

*Einbeschreiben, Kreis schlagen*
Schreibe einem Dreieck ein möglichst großes Quadrat ein? Wie? Da wird doch mehr gezeichnet als geschrieben? Mit einem Einschreiben hat es auch nichts zu tun. Beschreiben – das passt, wenn etwas da ist und man es nur sprachlich fasst, aber etwas, was noch nicht gefunden ist beschreiben, ja sogar einbeschreiben? Und gibt es ausbeschreiben? Warum sagt man nicht einpassen? Das passt auch besser zur Sprache der Handwerker und der Funktionsanpassung. Nur, leider, das Gegenstück „auspassen" gibt es hier auch nicht.

Die Geometrie ist voll von altertümlicher Sprechweisen, die man gefahrlos modernisieren kann:

Kreis schlagen $\rightarrow$ Kreis zeichnen
Lot fällen $\rightarrow$ Senkrechte zeichnen
abtragen $\rightarrow$ abmessen und markieren

Man könnte darüber nachdenken, hier statt zeichnen auch jeweils konstruieren zu sagen.

## Vereinfachungen

*Ergebnisse, Ereignisse und Elementarereignisse*
Die Ergebnismenge $\Omega$ eines Zufallsversuchs enthält die einzelnen Ergebnisse, etwa die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 beim Würfel. In der universitären Stochastik werden Ereignisse definiert als Teilemengen von $\Omega$ und Wahrscheinlichkeiten werden Ereignissen und nur Ereignissen zugeschrieben. Man schreibt nicht p(6), sondern p({6}), man sagt nicht die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 6, sondern des Elementarereignisses {6}. Diese Unterscheidung ist für einen formalen strengen Aufbau sinnvoll. Für die Schule ist die Verabredung: „Falls $x$ keine Menge ist: $p(x) := p(\{x\})$" sinnvoll und ausreichend. Damit kann man einen flexiblen Sprachgebrauch durch Lernende tolerieren – Verwirrung, was gemeint sein könnte, ist nicht zu befürchten.

*Größen*
Das Erbe von Autoritäten kann problematisch sein. Arnold Kirsch war ein ebenso einflussreicher wie gründlicher Didaktiker, der die Mathematikdidaktik enorm befördert hat. Aber in seinem großen Erbe gibt es auch einen Teil, den man als schweres Erbe bezeichnen muss: Seine Theorie der Größenbereiche. Kirsch scheidet sorgfältig Zahlen von Größen und definiert letztere als Elemente eines Größenbereichs für den die folgenden Axiome gelten (A. Kirsch: Mathematik wirklich verstehen. Aulis, Köln 1997, S. 53 ff):

- Menge $G$ mit Operation + und Relation <
- Für alle $A, B, C \in G$ gilt: $(A+B)+C = A+(B+C)$, $A+B = B+A$
- Es gilt entweder $A < B$ oder $A = B$ oder $B < A$
- $A + X = B$ ist lösbar genau dann wenn $A < B$.

Man kann sich dann leicht klar machen, dass beispielsweise Längen oder Flächeninhalte Größenbereiche sind, die diesen Axiomen genügen. Trotzdem rate ich dazu, die Theorie der Größenbereiche zu entsorgen, weil sich die Mathematik damit zu weit von ihren Anwendungen entfernen würde. Nach dieser Definition müsste man die folgenden problematischen Aussagen machen:

- Vektorielle „Größen" der Physik sind keine Größen (da nicht total geordnet).
- Auch sonst sind fast keine „Größen" der Physik Größen (etwa weil Null oder negative Werte vorkommen, was durch das letzte Axiom ausgeschlossen ist), dies trifft: Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Ladung, Temperatur, Impuls, Drehimpuls, Magnetisierung u.v.m.. Allenfalls die Energie könnte eine Kirsch'sche Größe sein, aber auch nur in der Quantenmechanik, weil klassisch $E = 0$ möglich ist.
- Die Wirtschaft arbeitet nicht mit Größen, denn Schulden fasst man dort als negative Größen auf, und Wachstumsraten können beide Vorzeichen haben.
- Die Wahrscheinlichkeit ist keine Größe.

Eine pragmatischere Definition von Größen ist die, dass eine Größe ist, was eine Dimension hat. Aber auch das ist problematisch. Erstens muss man wissen, was eine Dimension ist und zweitens sind dann beispielsweise Winkel und die Zahl der Atome in einem Gas keine Größen.

Folglich sollte man ganz pragmatisch werden: Größen sind Zahlen oder Vektoren. Die Einheiten könenn als Basen in einem Vektorraum aufgefasst werden. D. h. eine Größe ist ein algebraisches Objekt, das in einer Anwendung interpretiert wird. Dies ist eine pragmatische Definition – und mehr benötigt man m. E. nicht.

## Fazit

Durch ein paar Anpassungen wird die Mathematik nicht auf den Kopf gestellt, aber etwas konsistenter und hoffentlich leichter zu lernen. Nicht alle mögen alles gut finden. Da habe ich volles Verständnis. Die Rechtschreibreform hat vorgemacht, dass nicht alles was gut gedacht ist, auch gut ankommt, aber, wenn man mit Vorsicht und nach Diskussion vorgeht, kann sich die Arbeit doch lohnen – und das selbst, wenn am Ende nichts geändert wird. Dass dann aber zumindest einige Lehrkräfte sich wieder bewusst gemacht haben, wo Stolperfallen lauern – das wird dem Unterricht gut tun.

Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg
Email: reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

# The Challenges, Reforms, and Future Prospects of Elementary and Lower Secondary Mathematics Education in Germany

Michael Neubrand

Im Oktober 2016 fand an der East China Normal University (ECNU) in Shanghai der dritte sogenannte „Chinesisch–deutsche Didaktik-Dialog“ statt (Mentoren auf deutscher Seite: Dietrich Benner und Hilbert Meyer). Die Gespräche machten vor allem das überraschend reichhaltige Nachdenken über die Allgemeine Didaktik in China sichtbar und zeigten die vielfältigen Verbindungen zu deutschen Didaktik-Traditionen auf. Den vierten chinesisch-deutschen Dialog, nun mit deutlicherem Bezug zu den Fachdidaktiken, richtete Ende Mai dieses Jahres das IPN in Kiel aus.

Die ECNU ist für ihre internationale Ausrichtung in pädagogischen Fragen bekannt. Für die Mathematikdidaktik wird das etwa dadurch sichtbar, dass der auf Hamburg folgende ICMI im Jahr 2020 in Shanghai sein wird (Local Organizer: Binyan Xu). Man interessiert sich in Shanghai also von jeher für Entwicklungen in den Schulen weltweit. Es wird dort dafür seit Jahrzehnten die internationale Zeitschrift *Global Education* herausgegeben. Für diese Zeitschrift habe ich am Rande des Didaktik-Dialogs ein ausführliches Interview gegeben. Dieses wurde von der MA-Kandidatin Yamei Ke, die am „Institute of Curriculum and Instruction“ der ECNU arbeitet, geführt. Ziel des Interviews war es, für die fachlich nicht spezialisierte Leserschaft der Zeitschrift in groben Linien ein Bild vom Zustand und von den Problemen des deutschen Mathematikunterrichts zu zeichnen. Die ausführliche Konversation mit Ke Yamei zeigte mir, dass sowohl Basisinformationen (der erste Teil mit Zielen, Inhalten und Entwicklungslinien) als auch Problemaufrisse (der zweite Teil in Form der Benennung von fünf „core problems“) nötig waren.

Das Interview gab mir die Gelegenheit, unser eigenes Feld gewissermaßen „selbst von weit weg“ und durchaus spontan reagierend darzustellen. Gerade weil dann auch persönliche Sichtweisen und Einschätzungen zu Tage treten, erscheint mir ein solcher distanzierter Überblick durchaus lohnend auch für Leserinnen und Leser aus unserer Community. Dies ist der Grund, warum dieses Interview nun hier in den *Mitteilungen der GDM* abermals erscheint. Dafür habe ich die ursprüngliche Version in englischer Sprache, in der sich Yamei Ke und ich verständigten, beibehalten. Das Interview ist ca. ein Jahr nach dem Treffen in chinesischer Sprache von Yamei Ke veröffentlicht worden: *Global Education*, vol. 46 (11), pp. 3–11, November 2017. *Global Education* hat zugestimmt, den englischen Text hier für die GDM-Mitglieder erneut zugänglich zu machen.

* * *

*Abstract.* Keeping its original form of an interview, this article presents a discussion about the challenges, reforms, and the prospects of mathematics education in Germany. The interview addresses aims and goals, contents and processes of mathematics teaching. Compared with the guiding ideas some years ago, more emphasis is put on modeling today. The idea that every student should have enough mathematics knowledge and the disappointing results of Germany in the PISA-2000 comparison may have caused this change. Moreover, Germany faces, like other countries do, some basic problems in mathematics teaching, addressed here as the balance problem, the coherence problem, the curriculum problem, the classroom organization